Prérequis : Transformée de Fourier dans L^1, séries entières, fonctions analytiques

I Prolongement par continuité

1) Prolongement ponctuel

A est une partie de $\mathbb{R}$ et $(F, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition 1. Soit $f : A \to F$ et $a \in A$. f est dite continue lorsque $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.

Proposition 2. *Si $a \in \overline{A} \setminus A$, et si f admet ℓ comme limite en a, on peut définir une application continue $\tilde{f}$ par :*

$$\tilde{f} : \left| \begin{array}{ccc} A \cup \{a\} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq a \\ \ell & si \quad x = a \end{cases} \end{array} \right.$$

Définition 3. $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en a.

Exemple 4.
— $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin x}{x} \end{array} \right.$ *se prolonge en 0 par 1.*
— $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \end{array} \right.$ *se prolonge en $(0,0)$ par 0.*

2) Prolongement par densité

Théorème 5 (Principe de prolongement des identités)**.** *Soient f et g deux fonctions continues de l'espace topologique E dans l'espace vectoriel normé F. Si f et g coïncident sur une partie dense de E, elles coïncident sur E tout entier.*

Définition 6. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in I,\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Théorème 7. *Soient E et F deux espaces métriques, avec F complet. Soient A une partie dense de E et $f : A \to F$ uniformément continue. Il existe une unique application uniformément continue $g : E \to F$ qui prolonge f.*

Application 8 (Construction de l'intégrale de Riemann sur des fonctions réglées)**.** *Une fonction est réglée si elle est limite uniforme de fonctions en escalier. Pour une fonction en escalier $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\lambda_i$, avec $(x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ et λ_i des constantes, on a $\int_a^b f(t)dt \leqslant \|f\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) = (b-a)\|f\|_\infty$. L'intégration est alors une fonction lipschitzienne, donc uniformément continue, de l'espace des fonctions en escaliers dans $\mathbb{R}$. Par le théorème, elle se prolonge de façon unique en une forme linéaire sur l'espace des fonctions réglées.*

Théorème 9. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors :*

(i) Il existe $(f_n)_n$ une suite de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Pour une telle suite $(f_n)_n$, la suite $(\hat{f}_n)_n$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vers une limite $\tilde{f}$ indépendante de la suite choisie.

Définition 10. $\tilde{f}$ est la transformée de Fourier de f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 11 (Plancherel)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\left\|\tilde{f}\right\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2$. De plus, $f \mapsto \tilde{f}$ est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^d)$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$*

3) Prolongement des applications linéaires continues

Théorème 12 (Hahn-Banach)**.** *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, et soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $f : F \to \mathbb{K}$ linéaire continue. Il existe un prolongement continu g de f sur E tel que $\|g\| = \|f\|$.*

Application 13. *Si F est un sous-espace vectoriel de $(E, \|.\|)$, F est dense dans E si, et seulement si, toute forme linéaire qui s'annule sur F est nulle sur E.*

II Prolongement et différentiabilité

1) Prolongement ponctuel et régularité

Théorème 14. *Soient E un espace vectoriel normé et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to E$ continue et $a \in I$. Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si f' possède une limite ℓ au point a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.*

Contre-exemple 15. *Ce théorème est faux si f n'est pas continue, comme avec $a=0$ et :*

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x+1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Exemple 16. *On pose :*

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Alors f est $\mathcal{C}^\infty$, non nulle sur $\mathbb{R}^\star$, et dont les dérivées sont nulles en 0.

2) Prolongement des solutions d'équations différentielles

On s'intéresse aux équations différentielles du premier ordre de la forme :

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) \tag{$\star$}$$

où $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et x une fonction $\mathcal{C}^1$ de t à valeur dans Ω.

Définition 17.
(i) Une solution de $(\star)$ est un couple (x, J), où $J \subseteq I$ est un intervalle, et x est une fonction $\mathcal{C}^1$ de J dans Ω qui vérifie $(\star)$ en tout point de J.
(ii) Si $J = I$, on dit que la solution est globale.
(iii) (x_1, J_1) et (x_2, J_2) sont deux solutions de $(\star)$, on dit que (x_2, J_2) prolonge (x_1, J_1) si $J_1 \subset J_2$ et $x_1 = x_2$ sur J_1.
(iv) Une solution est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement.

Théorème 18. *On suppose que $I =]a, b[$ et que $\Omega = \mathbb{R}^n$. Soit (x, J) une solution maximale de $(\star)$, où $J =]T_\star, T^\star[$, alors :*

(i) Si $T^\star < b$, alors $\lim\limits_{t \to T^\star} |x(t)| = +\infty$

(ii) Si $T_\star > a$, alors $\lim\limits_{t \to T_\star} |x(t)| = +\infty$

Corollaire 19 (Critère de prolongement)**.** *Soit (x, J) une solution de $(\star)$, où $J =]\alpha, \beta[$ et $a < \alpha < \beta < b$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ et $A > 0$ tels que $|x(t)| \leqslant A$ pour tout $t \in [\beta - \delta, \beta[$ (resp. $]\alpha, \alpha + \delta]$). Alors x peut être prolongée au-delà de β (resp. α) en une solution de $(\star)$.*

Corollaire 20. *Soit $f :]a, b[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et bornée, alors toute solution du problème $(\star)$ est globale.*

Exemple 21. *Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le problème*

$$x'(t) = \frac{x(t)^2}{1 + x(t)^2} \qquad \text{et} \qquad x(0) = x_0$$

admet pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ une solution unique définie sur $\mathbb{R}$.

III Prolongement des fonctions analytiques

1) Comportement des séries entières sur le bord du disque de convergence

Théorème 22 (Abel angulaire)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f sa somme et :*

$$\Delta_\theta = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 - z = \rho e^{i\varphi}, \, \rho > 0, \, |\varphi| < \theta \right\} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$$

Alors :

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_\theta}} f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n$$

Application 23. $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ *et* $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{(-1)n-1}{n} = \ln(2)$

Théorème 24 (Taubérien faible)**.** *Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1. On suppose que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(z) = \ell$ existe, et $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $\sum a_n$ converge et $\ell = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n$.*

2) Principe du prolongement analytique

Théorème 25 (Zéros isolés)**.** *Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe $\mathcal{U}$ non identiquement nulle. Alors les zéros de f sont isolés.*

Corollaire 26 (Prolongement analytique)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble $D \subset \mathcal{U}$ ayant un point d'accumulation dans $\mathcal{U}$, alors elles sont égales sur $\mathcal{U}$.*

Exemple 27. *(i)* $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

(ii) Il existe une unique fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, qui est l'identité.

Proposition 28. *Soit $P = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(z) > 0\right\}$. On définit sur P la fonction holomorphe :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Proposition 29. *Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.*

Développements

— Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible (22,24) [Gou]
— Fonction Gamma (28,29) [Les]

Références

[Gou] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses
[BMP] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation*
[QZ] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Analyse pou l'agrégation.* Dunod
[BSF] Bernard Beck, Isabelle Selon, and Christine Feuillet. *HPrépa Maths 2e année MP-MP*.* Hachette
[Les] Ahmed Lesfari. *Variables complexes.* Ellipses